8.4 Satz (Charakterisierung der Det.)

Die Determinante ist die einzige Abbildung

$$\mathrm{Mat}_K(n\times n) \longrightarrow K,$$

die die folgenden drei Eigenschaften hat:

(D1) multilinear } in den Zeilen
(D2) alternierend } in den Zeilen
(D3) normiert $\quad (\det(\mathbb{1}_n) = 1)$

Erläuterung: Schreibe im Folgenden Vektoren $\in K^n$ als Zeilen.

D1 bedeutet:

Wenn wir alle Zeilen $\underline{a}_1, \dots \cancel{\underline{a}_j} \dots, \underline{a}_n$ außer Zeile j fixieren, ist

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow K \\ \underline{a}_j &\longmapsto \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

linear (für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$).

D2 bedeutet:

Sind zwei Zeilen gleich ($\underline{a}_j = \underline{a}_k$ für ein Paar (j,k) mit $j \neq k$), so ist

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = 0.$$

Notiz 8.5: Aus (D1) & (D2) folgt für $\sigma \in S_n$

$$\det \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Sei $f: \operatorname{Mat}_K(n \times n) \longrightarrow K$ beliebige Abb., die (D1) & (D2) erfüllt. Zu zeigen ist:

$$f\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Der wesentliche Fall ist der Fall $n = 2$, $\sigma = (1\,2)$. In diesem Fall ist zu zeigen:

$$f\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Das folgt aus:

$$
\begin{aligned}
0 \underset{D2}{=} f\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} &\underset{\substack{D1 \\ (i=1)}}{=} f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\
&= f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{D1 \\ (j=2)}}{=} f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&\underset{D2}{=} f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der allgemeine Fall folgt daraus, dass sich $\sigma \in S_n$ zerlegen lässt in Transpositionen τ_i, also

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m ,$$

und

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sgn}(\tau_m). \qquad \square$$

Notiz 8.6: Wegen $\det(A^T) = \det(A)$ (Notiz 8.3) gilt Charakterisierung 8.4 ebenso für Spalten wie für Zeilen:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{D1}^T) & \det \text{ multilinear} \\ (\mathrm{D2}^T) & \det \text{ alternierend} \end{array}\right\} \text{ in Spalten}$$

Für die Berechnung der Det. bedeutet Charakt. 8.4:

(Vert): Beim Vertauschen von Zeilen/Spalten wechselt das Vorzeichen (Notiz 8.5)

(Sk.) Skalieren wir eine Zeile/Spalte mit einem Faktor $s \in K$, ändert sich die Determinante um genau diesen Faktor (D1)

(Add.) Addieren wir ein Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer **anderen** Zeile/Spalte, ändert sich die Determinante **nicht**.

(folgt aus D1 & D2)

z.B.:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 + s\cdot a_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{D1\ (j=2)}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ s\cdot a_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{D1\ (j=2)}{=} \det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \cancel{s\cdot\det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{=0\ (D2)}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = -\det\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ -3 \\ -3 \end{array}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -6$$

Beispiel 8.2 (v)

Beweis zu 8.4, Teil 1: det hat diese Eigenschaften

(D3): $\det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Bsp. 8.2} \\ \text{(v)}}}{=} 1^n = 1.$

(D1): $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ Zeilenvektoren, also
$\underline{a}_i = (a_{i1} \; \ldots \; a_{in})$

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j + \underline{a}_j' \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} \cdot \left(a_{j\sigma(j)} + a'_{j\sigma(j)}\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} \cdot a_{j\sigma(j)}$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} \cdot a'_{j\sigma(j)}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j' \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ s\,\underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)}\cdot s\cdot a_{j\sigma(j)}$$

$$= s\cdot \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)}\cdot a_{j\sigma(j)}$$

$$= s\cdot\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

(D2) Sei $\underline{a}_j = \underline{a}_k \quad (j\neq k)$

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_+} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma'\in S_-} \operatorname{sgn}(\sigma') \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma'(i)}$$

mit $S_+ := \{\sigma\in S_n \mid \sigma(j) > \sigma(k)\}$

$S_- := \{\sigma\in S_n \mid \sigma(j) < \sigma(k)\}$

$= 0$, denn:

- Wir haben Bijektion

$$S_+ \xrightarrow{\cong} S_-$$
$$\sigma \longmapsto \sigma' := (\sigma(j)\ \sigma(k)) \circ \sigma$$
$$(\sigma'(j)\ \sigma'(k)) \circ \sigma' \longleftarrow\!\shortmid \sigma'$$

- $\operatorname{sgn}(\sigma') = \operatorname{sgn}\overbrace{((\sigma(j)\ \sigma(k)))}^{-1} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$
$= -\operatorname{sgn}(\sigma)$

- $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma'(i)} = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j,k}}^{n} a_{i\sigma'(i)} \cdot a_{j\sigma'(j)} \cdot a_{k\sigma'(k)}$

$= \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \cdot a_{j\sigma(k)} \cdot a_{k\sigma(j)}$

$(a_j = a_k)$ $\quad \|$ $\qquad \|$

$= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j,k}}^{n} a_{i\sigma(i)} \cdot \underline{a_{k\sigma(k)}} \cdot a_{j\sigma(j)}$

$= \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ $\quad\square$

Beweis zu 8.4 Teil 2: det ist einzigartig!

Sei $f: \mathrm{Mat}_K(n \times n) \longrightarrow K$ eine Abb., die (D1), (D2), (D3) erfüllt.

Schreibe $\underline{e}_j = (0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0)$.

$$f\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \sum_{j_1} a_{1j_1} \underline{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n} a_{nj_n} \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{D1 \\ \text{für Zeile } 1}}{=} \sum_{j_1} a_{1j_1} f\begin{pmatrix} \underline{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n} a_{nj_n} \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\underset{D1}{=} \dots$$

$$\dots \underset{D1}{=} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ j_i \in \{1, \dots, n\}}} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \cdot f\begin{pmatrix} \underline{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\underset{D2}{=} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ \text{alle } j_i \in \{1, \dots, n\} \\ \text{verschieden}}} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \cdot f\begin{pmatrix} \underline{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} f \begin{pmatrix} \underline{e}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \underline{e}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

$j_i \mathrel{\hat{=}} \sigma(i)$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \vdots \\ \underline{e}_n \end{pmatrix}}_{1 \ (D3)}$$

Notiz 8.5

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

$\square$